ძვირფასო სტუდენტებო,
დავალების შესრულების დაწყებამდე,
გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 1

დავალება № 6. კვადრატული ფუნქცია და მისი გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში

ქვემოთმოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ ლექცია 6-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

1- ა, გ	1- ბ, დ	2- ა, გ	2- ბ, დ	3- ა, გ	3, ბ, დ	4- ა, გ	4- ბ, დ	5- ა	5- ბ
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16									

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა:

1-ა.
იპოვეთ შემდეგი ფუნქციისთვის x-გადაკვეთა:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 16}$$

ამოხსნა. როგორც ცნობილია, პარაბოლა x ღერძს გადაკვეთს იმ წერტილში, რომლისთვისაც $y = 0$. ე.ი. უნდა ამოიხსნას განტოლება:
$x^2 - 16 = 0$
$x^2 = 16$
$x^2 = \pm 4$
განტოლებას აქვს 2 ამონახსნი, რაც იმას ნიშნავს, რომ პარაბოლა x ღერძს გადაკვეთს ორ წერტილში: $(-4; 0)$, $(4; 0)$.
პასუხი: $(\boldsymbol{-4; 0})$, $(\boldsymbol{4; 0})$.

1-გ.
იპოვეთ შემდეგი ფუნქციისთვის x-გადაკვეთა:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 18x + 81}$$

ამოხსნა. წინა მაგალითის ანალოგიურად, უნდა ამოიხსნას შემდეგი კვადრატული განტოლება:
$x^2 - 18x + 81 = 0$
$D = b^2 - 4ac = 18^2 - 4 \cdot 81 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{18}{2} = 9$$

ე.ი. პარაბოლა $(9; 0)$ წერტილში ეხება x ღერძს.
პასუხი: $(\mathbf{9}; \mathbf{0})$

2-ა.
იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა: $\boldsymbol{f(x) = -3x^2 + 6x - 4}$

ამოხსნა. x^2 -ის კოეფიციენტია -3, რაც იმას ნიშნავს, რომ პარაბოლის შტოები მიმართულია ქვემოთ, ამიტომაც წვერო წარმოადგენს მაქსიმუმის წერტილს. წვეროს კოორდინატების გამოსათვლელი ფორმულებია:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = -\frac{D}{4a}.$$

ამ ფორმულების გამოყენებით:

$x_0 = -\frac{6}{2\cdot(-3)} = 1, \quad y_0 = -\frac{36-4\cdot(-3)\cdot(-4)}{4\cdot(-3)} = -1.$

y_0-ის პოვნა შესაძლებელია ფორმულის გარეშეც. ამისათვის საკმარისია, ფუნქციაში x-ის ნაცვლად ჩავსვათ x_0 - ის მნიშვნელობა: $y_0 = -3 + 6 - 4 = -1$.
ამრიგად, ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა -1, რომელსაც ფუნქცია აღწევს $x_0 = 1$- ში.
პასუხი: -1.

2-გ.
იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა: $\boldsymbol{f(x) = -3x^2 + 18}$

ამოხსნა. $a = -3 < 0$, ამიტომ პარაბოლის შტოები მიმართულია ქვემოთ. ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობის საპოვნელად გამოვთვალოთ წვეროს კოორდინატები:
$x_0 = 0, \quad y_0 = 18$
ამრიგად, ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა 18, რომელსაც ფუნქცია აღწევს $x_0 = 0$ - ში.
პასუხი: 18

3-ა.
იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა: $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 6x + 5}$

x^2 -ის კოეფიციენტია 1, რაც იმას ნიშნავს, რომ პარაბოლის შტოები მიმართულია ზემოთ და წვერო წარმოადგენს მინიმუმის წერტილს. წვეროს კოორდინატებია:

$$x_0 = -\frac{6}{2} = -3, \quad y_0 = (-3)^2 + 6\cdot(-3) + 5 = -4.$$

ამრიგად, ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა -4, რომელსაც ფუნქცია აღწევს $x_0 = -3$- ში.
პასუხი: -4

3-გ.
იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა: $\boldsymbol{f(x) = 4x^2 - 9}$

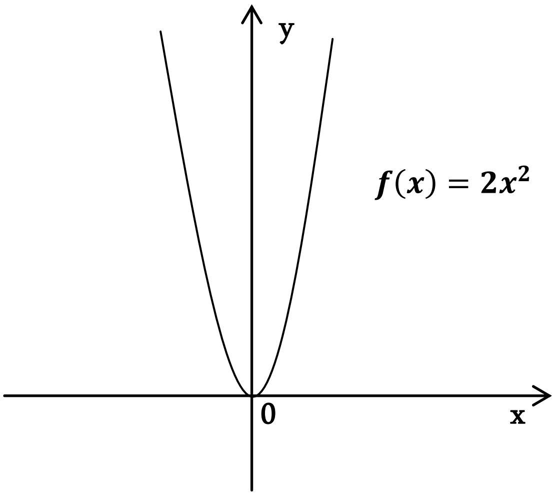
$a = 4 > 0$, პარაბოლის შტოები მიმართულია ზემოთ, ხოლო წვეროს კოორდინატებია: $x_0 = 0, \quad y_0 = -9$.
ე.ი. მოცემული ფუნქცია $x_0 = 0$- ში იღებს უმცირეს მნიშვნელობას, რომელიც -9 -ის ტოლია.

პასუხი: -9

4-ა.
ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი: $\boldsymbol{f(x) = 2x^2}$

ამოხსნა. x^2 -ის კოეფიციენტია 2, რაც იმას ნიშნავს, რომ პარაბოლის შტოები მიმართულია ზემოთ. პარაბოლა ღერძებს კვეთს $(0;0)$ წერტილში, რომელიც წარმოადგენს ამ პარაბოლის წვეროს. მიღებული მონაცემებით ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი.

პასუხი:



4-გ.

ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი: $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x + 3}$

ამოხსნა. $a = 1 > 0$, პარაბოლის შტოები მიმართულია ზემოთ. პარაბოლა y ღერძს გადაკვეთს $(0;3)$ წერტილში, ხოლო x-გადაკვეთის საპოვნელად უნდა ამოვხსნათ განტოლება:

$x^2 + 2x + 3 = 0$

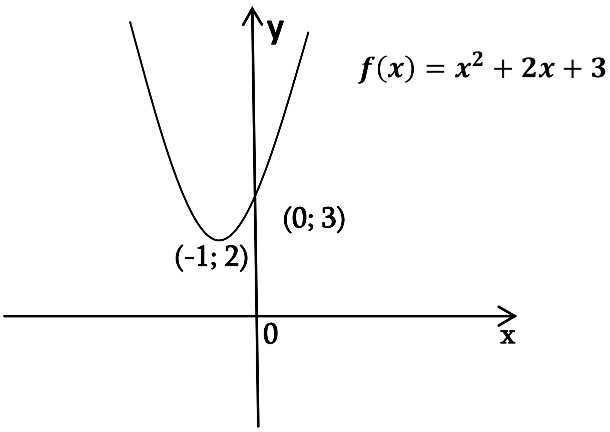
$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$

განტოლებას არ გააჩნია ამონახსნი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, ე.ი. პარაბოლა არ კვეთს x ღერძს. ახლა გამოვთვალოთ წვეროს კოორდინატები:

$x_0 = -\dfrac{2}{2} = -1, \quad y_0 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 2.$

მიღებული მონაცემებით ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი.

პასუხი:



5-ა.

მოცემული მთლიანი ამონაგების ფუნქციისათვის იპოვეთ შესაბამისი მოთხოვნის ფუნქცია.
$\boldsymbol{TR = 50Q - 4Q^2}$

ამოხსნა. (3.3) ფორმულის ძალით გვექნება: $TR = Q \cdot p$.

აქედან, $p = \frac{50Q - 4Q^2}{Q} = 50 - 4Q.$

პასუხი: $\boldsymbol{p = 50 - 4Q}$.

6. უცხოელ ტურისტებს შორის პოპულარობით სარგებლობს წიგნი ქართული ღვინოების შესახებ. თუ მისი ფასი 15 ლარია, დღეში 50 ცალი იყიდება. თუ წიგნის ფასს 2 ლარით შევამცირებთ, მაშინ გაიყიდება 10 ცალით მეტი. იპოვეთ მაქსიმალური ამონაგების სიდიდე, თუ დამოკიდებულება ფასსა და რაოდენობას შორის წრფივია.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად, დამოკიდებულებას ფასსა და რაოდენობას შორის განსაზღვრავს წრფე. თუ წიგნის ფასს აღვნიშნავთ p-თი, ხოლო ხოლო რაოდენობას - Q -თი, მაშინ აღნიშნული წრფე გაივლის (50;15) და (60;13) წერტილებზე. მისი განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{Q-50}{60-50} = \frac{p-15}{13-15}.$$

აქედან მარტივად მივიღებთ საძიებელი წრფის განტოლებას:

$$p = -\frac{1}{5}Q + 25.$$

მაქსიმალური ამონაგების სიდიდის საპოვნელად გამოვიყენოთ ფორმულა: $TR = Q \cdot p$. $TR = -\frac{1}{5}Q^2 + 25Q$.
მივიღეთ კვადრატული ფუნქცია, რომლის შტოები მიმართულია ქვემოთ, ამასთან
$Q_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{25}{2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)} = 62{,}5.$

ვინაიდან წიგნების რაოდენობა ნატურალური რიცხვია, ამიტომ ამონაგები მაქსიმალურია, როცა გაიყიდება $Q = 62$ ან $Q = 63$ წიგნი, და ეს მაქსიმალური სიდიდე შეადგენს
$TR = 781{,}2$ ლარს. ($TR = -\frac{1}{5}\cdot 62^2 + 25\cdot 62 = 781{,}2$. იგივე სიდიდეს მივიღებთ $Q = 63$ -თვის)

პასუხი: $\boldsymbol{TR = -\frac{1}{5}Q^2 + 25Q}$. **მაქსიმალური ამონაგებია 781,2 ლარი, როცა** $\boldsymbol{Q = 62}$ **ან** $\boldsymbol{Q = 63}$.

9. მოთხოვნის ფუნქციაა $\boldsymbol{p = -2Q + 140}$. **ჩაწერეთ მთლიანი ამონაგები** $(\boldsymbol{TR})$, **როგორც** $\boldsymbol{Q}$ **რაოდენობის ფუნქცია. იპოვეთ ის** $\boldsymbol{Q_0}$ **რაოდენობა, რომელიც მაქსიმალურ მნიშვნელობას ანიჭებს მთლიანი ამონაგების ფუნქციას.**

ამოხსნა. $\boldsymbol{TR = Q\cdot p = -2Q^2 + 140Q}$.

$$\boldsymbol{Q_0} = -\frac{b}{2a} = -\frac{140}{2\cdot(-2)} = 35.$$

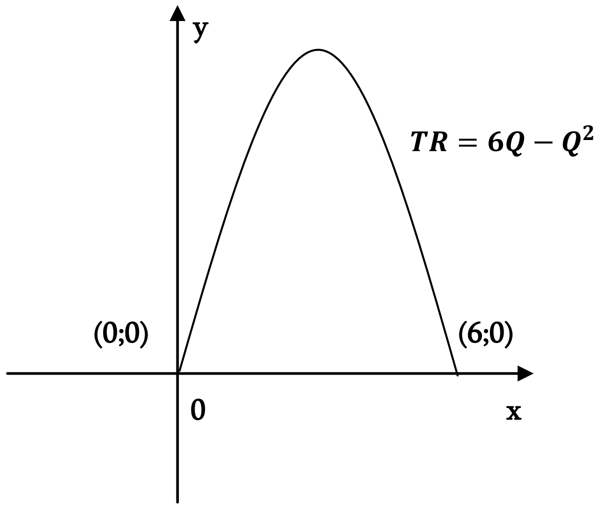
პასუხი: $\boldsymbol{TR = -2Q^2 + 140Q,\ \ Q_0 = 35}$.

10. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $\boldsymbol{p = 6 - Q}$. **იპოვეთ მთლიანი ამონაგების ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი.**

ამოხსნა. $p = 6 - Q,\ TR = Q\cdot p = 6Q - Q^2$.
$a = -1 < 0$, ამიტომ პარაბოლის შტოები მიმართულია ქვემოთ. პარაბოლა ღერძებს კვეთს წერტილებში: (0; 0), (6; 0). წვეროს კოორდინატებია:

$$Q_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2} = 3,\ \ TR_0 = 6\cdot 3 - 9 = 9.$$

პასუხი: $\boldsymbol{TR = 6Q - Q^2}$

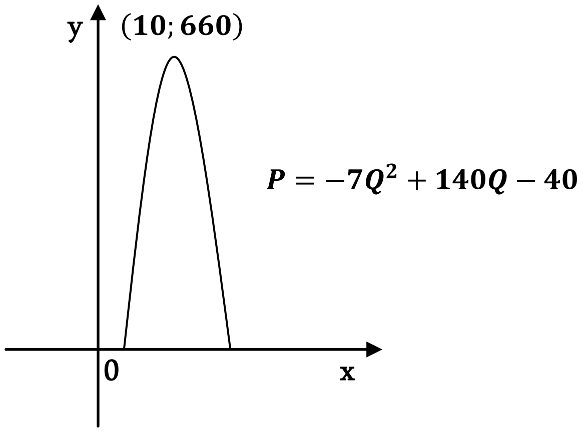


12. წარმოების ფიქსირებული დანახარჯია 50 ლარი, ხოლო ცვალებადი დანახარჯი - 58 ლარი. ჩაწერეთ საშუალო დანახარჯი (AC), როგორც Q რაოდენობის ფუნქცია.
ამოხსნა. გამოვიყენოთ (6. 2) ფორმულა:

$$(AC) = \frac{(FC) + (VC)Q}{Q} = \frac{(FC)}{Q} + (VC) = \frac{50}{Q} + 58.$$

პასუხი: $\boldsymbol{(AC) = \frac{50}{Q} + 58}$

14. მოთხოვნის ფუნქციაა $p = -7Q + 150$, ხოლო მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა $(TC) = 40 + 10Q$. ჩაწერეთ მოგების ფუნქცია, როგორც Q რაოდენობის ფუნქცია, და ააგეთ მისი გრაფიკი. რა რაოდენობა უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას და როგორია ამ შემთხვევაში ფასი?
ამოხსნა.
P (მოგების ფუნქცია)$= (TR) - (TC)$.
$(TR) = Q \cdot p = -7Q^2 + 150Q$.
აქედან, P (მოგების ფუნქცია)$= -7Q^2 + 150Q - 40 - 10Q = -7Q^2 + 140Q - 40$.
მივიღეთ კვადრატული ფუნქცია, პარაბოლის შტოები მიმართულია ქვემოთ, ხოლო წვეროს კოორდინატებია:
$Q_0 = -\frac{140}{2\cdot(-7)} = 10$, $P_0 = -700 + 1400 - 40 = 660$.



მაქსიმალური მოგება იქნება, როცა $Q = 10$. ამ შემთხვევაში ფასი $p = -7 \cdot 10 + 150 = 80$ ლარია.

პასუხი: $\boldsymbol{P = -7Q^2 + 140Q - 40}$, მაქსიმალური მოგება - $\boldsymbol{Q = 10}$, ფასი - 80 ლარი.